12. Torus 上ノ流レノ問題ニ関スル一注意

阪大　角谷靜夫

(昭和20年5月25日受付)

Torus 上ノ流レニ関スル Poincaré, Denjoy, Weil 等ノ研究ニ於ケル基本的結果ノ一ツハ次ノ如ク述ベルコトが出来ル.

<u>定理</u>　$\varphi(t)$ が $-\infty < t < \infty$ ニテ定義サレタ実変数値ノ単調増加連続函数デ且ツ $\varphi(t+1) \equiv \varphi(t)+1$ ヲスベテノ t ニ対シテ満足シテオルナラバ

(1)　$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^n(t)}{n} = \omega \quad (\omega \text{ ハ } t \text{ ニ無関係})$$

が存在シ且ツ

(2)　$$t + n\omega - 1 < \varphi^n(t) < t + n\omega + 1$$

がスベテノ t 及ビ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ対シテ成立スル。

<u>証明</u>　先ヅ $\varphi^n(t+1) \equiv \varphi^n(t)+1$ がスベテノ t ニ対シテ成立スルコトニ注意スル　コレヨリ

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi^n(t+a) < \varphi^n(t+[a]+1) \\ \qquad\qquad = \varphi^n(t)+[a]+1 \leqq \varphi^n(t)+a+1 \\ \varphi^n(t+a) \geqq \varphi^n(t+[a]) = \varphi^n(t)+[a] \\ \qquad\qquad > \varphi^n(t)+a-1 \end{cases}$$

シタガッテ

$$(4)\quad \begin{aligned} \varphi^{m+n}(t) = \varphi^m(\varphi^n(t)) &= \varphi^m(t+(\varphi^n(t)-t)) \\ &< \varphi^m(t)+\varphi^n(t)-t+1 \\ &> \varphi^m(t)+\varphi^n(t)-t-1 \end{aligned}$$

ヨッテ $a_n = \varphi^n(t)-t$ トオクコトニヨリ定理ハ次ノLemmaニ帰着出来ル.

Lemma 1. $\{a_n \mid n-1,2,\cdots\}$ ガ実数ノ系列デ

$$(5)\quad a_m+a_n-1 < a_{m+n} < a_m+a_n+1 \qquad m,n=1,2,\cdots$$

ヲ満足スルナラバ

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \omega$$

ガ存在シテ

$$(7)\quad n\omega-1 < a_n < n\omega+1, \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

更ニ $b_n = a_n+1$ (又ハ $b_n = -a_n+1$) $n=1,2,\cdots$ トオクコトニ依リコレハ次ノLemmaニ帰着サレル.

Lemma 2. $\{a_n \mid n=1,2,\cdots\cdots\}$ ガ実数ノ系列デ

$$(8)\quad a_{m+n} < a_m+a_n, \qquad m,n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ満足スレバ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \omega \tag{9}$$

ガ存在シ

$$n\omega < a_n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots \tag{10}$$

コレハ Pólya-Szegö ニ出テキル問題デアルガ次ノ如ク証明スルコトガ出来ル。

任意ニ n_0 ヲ固定スルト，任意ノ n ハ $n = qn_0 + r$，$0 \leqq r \leqq n_0 - 1$ トイフ形ニ表ハサレルカラ $a_n \leqq qa_{n_0} + a_r \leqq qa_{n_0} + M$. 但シ $a_0 = 0$ 且ツ $M = \max(a_0, a_1, \cdots, a_{n_0 - 1})$ トオク. 然ルトキハ $\frac{a_n}{n} \leqq \frac{q}{n} a_{n_0} + \frac{M}{n} \leqq \frac{a_{n_0}}{n_0} + \frac{M}{n}$ ヨッテ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqq \frac{a_{n_0}}{n_0}$$

コレヨリ (9) ガ存在シ，

$\omega \leqq \frac{a_n}{n}$, $\quad n = 1, 2, \cdots\cdots$ トナルコトヲ注意スル

$\omega \leqq \frac{a_{2n}}{2n} < \frac{a_n}{n}$ トナルカラ (10) ハ明カニ成立スル。